OPERACIONES CON MATRICES FICHA 3

1) Calcula la matriz X tal que $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

2) Encuentra una matriz que conmute con la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3) Calcula la matriz $X^2 \cdot Y$, donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden 2x2 que verifican:

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

4) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden ¿Es cierta en general la relación: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$? Justifica la respuesta.

5) Demuestra que en el conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, siendo x un número real, el producto es conmutativo.

SOLUCIONES

1) $$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x2}{A} = \underset{2x2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a = 2 \\ 2b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \\ b = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

siendo c, d, e y f números reales cualesquiera

2) A = $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3n \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2b = b \\ 3c = c \\ d = 2d \end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} 3f = 2f \\ g = 3g \\ 2h = 3h \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix} f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{matrix}\right.$$

Una matriz B, que conmute con A sería, por ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3) $$\left.\begin{matrix} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 10X + 6Y = 2A \\ -9X - 6Y = -3B \end{matrix}\right\} \rightarrow X = 2A - 3B$$

$$2Y = B - 3X \Rightarrow 2Y = B - 6A + 9B \Rightarrow Y = 5B - 3A$$

$$X = 2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X^2 \cdot Y = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 25 \\ 14 & 40 \end{pmatrix}$$

4) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ pero sabemos que $AB \neq BA$, ya que el producto de matrices no es conmutativo, por tanto $AB + BA \neq 2AB$, con lo que la igualdad no es cierta.

5) Sean dos matrices de esta forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SON IGUALES

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y+x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$